Note alla traccia del 3 novembre 2025 - Esercizio 1

(a) Il sottogruppo cercato è ciclico, in quanto sottogruppo di gruppi ciclici. Il suo generatore α, appartenendo sia a $\langle\sigma\rangle$ sia a $\langle\tau\rangle$, è, contemporaneamente, una potenza σ^s di σ e una potenza di τ^t di τ. In particolare, dovrà essere $\Omega_{\sigma^s}(15)=\Omega_{\tau^t}(15)$. Analizziamo separatamente queste orbite. Una volta individuato, nella decomposizione in cicli disgiunti di σ, il ciclo $\gamma_1=(15,16)$, al cui supporto appartiene 15, si avrà che, per ogni intero k, $\Omega_{\sigma^k}(15)=\Omega_{\gamma_1{}^k}(15)$. Precisamente:

$$\gamma_1{}^k=\begin{cases} id & \text{se } k \text{ è pari,}\\ (15,16) & \text{se } k \text{ è dispari}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \Omega_{\gamma_1{}^k}(15)=\begin{cases} \{15\} & \text{se } k \text{ è pari,}\\ \{15,16\} & \text{se } k \text{ è dispari}\end{cases}$$

Analogamente, guardando al ciclo $\gamma_2=(15,16,17,18)$ di τ, si osserva:

$$\gamma_2{}^k=\begin{cases} id & \text{se } k\equiv 0 \pmod 4\\ (15,16,17,18) & \text{se } k\equiv 1 \pmod 4\\ (15,17)(16,18) & \text{se } k\equiv 2 \pmod 4\\ (15,18,17,16) & \text{se } k\equiv 3 \pmod 4\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \Omega_{\tau^k}(15)=\begin{cases} \{15\} & \text{se } k\equiv 0 \pmod 4\\ \{15,16,17,18\} & \text{se } k\equiv 1 \pmod 4\\ \{15,17\} & \text{se } k\equiv 2 \pmod 4\\ \{15,16,17,18\} & \text{se } k\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

Dal confronto tra le orbite si deduce quindi che dovrà essere $s\equiv 0 \pmod 2$ e $t\equiv 0 \pmod 4$. In altri termini, α sarà una potenza di σ con esponente pari e una potenza di τ con esponente multiplo di 4. Ne consegue che nel sottogruppo cercato, che è $\langle\alpha\rangle$, vi saranno solo potenze di σ^2 e solo potenze di τ^4. Pertanto il sottogruppo cercato si può riscrivere nella forma $\langle\sigma^2\rangle\cap\langle\tau^4\rangle$.

(b) La permutazione $\alpha=(19,20)(21,22)$ commuta con il seguente prodotto, perché

↓ $\boxed{\text{è disgiunta da}}$ ↓ è uguale a

$$\sigma=\boxed{(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12,13,14)(15,16)(17,18)}(19,20)(21,22)$$

e la permutazione $\alpha=(19,20)(21,22)$ commuta anche con quest'altro prodotto, dato che

↓ $\boxed{\text{è disgiunta da}}$ ↓ è il quadrato di

$$\tau=\boxed{(1,4,7,2,5,8,3,6,9)(10,12,14,11,13)(15,16,17,18)}(19,21,20,22).$$

La permutazione $\beta = (15,17)(16,18)$ commuta con il prodotto

$\downarrow \boxed{\text{è disgiunta da}}$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ commuta con

$$\sigma = \boxed{(1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)(10,11,12,13,14)(19,20)(21,22)}(15,16)(17,18)$$

e la permutazione $\beta = (15,17)(16,18)$ commuta anche con il prodotto

$\downarrow \boxed{\text{è disgiunta da}}$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ è il quadrato di

$$\tau = \boxed{(1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9)(10,12,14,11,13)(19,21,20,22)}(15,16,17,18).$$